Группа: С-11 ОУДп 13 «Физика» 08_04_2020
Вид занятия: лекция
Тема занятия: «Свободные электромагнитные колебания»

Электромагнитные колебания

Темы кодификатора ЕГЭ: свободные электромагнитные колебания, колебательный контур, вынужденные электромагнитные колебания, резонанс, гармонические электромагнитные колебания.

Электромагнитные колебания — это периодические изменения заряда, силы тока и напряжения, происходящие в электрической цепи. Простейшей системой для наблюдения электромагнитных колебаний служит колебательный контур.

Колебательный контур

Колебательный контур — это замкнутый контур, образованный последовательно соединёнными конденсатором и катушкой.

Зарядим конденсатор, подключим к нему катушку и замкнём цепь. Начнут происходить *свободные электромагнитные колебания* — периодические изменения заряда на конденсаторе и тока в катушке. Свободными, напомним, эти колебания называются потому, что они совершаются без какого-либо внешнего воздействия — только за счёт энергии, запасённой в контуре.

Период колебаний в контуре обозначим, как всегда, через T. Сопротивление катушки будем считать равным нулю.

Рассмотрим подробно все важные стадии процесса колебаний. Для большей наглядности будем проводить аналогию с колебаниями горизонтального пружинного маятника.

Начальный момент: $t = 0$. Заряд конденсатора равен q_0, ток через катушку отсутствует (рис. 1). Конденсатор сейчас начнёт разряжаться.

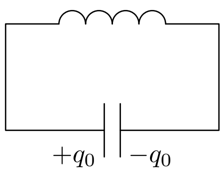

Рис. 1. $t = 0$

Несмотря на то, что сопротивление катушки равно нулю, ток не возрастёт мгновенно. Как только ток начнёт увеличиваться, в катушке возникнет ЭДС самоиндукции, препятствующая возрастанию тока.

Аналогия. Маятник оттянут вправо на величину x_0 и в начальный момент отпущен. Начальная скорость маятника равна нулю.

Первая четверть периода: $0 < t < T/4$. Конденсатор разряжается, его заряд в данный момент равен q. Ток I через катушку нарастает (рис. 2).

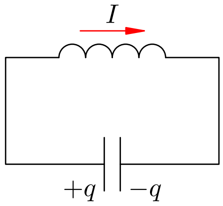

Рис. 2. $0 < t < T/4$

Увеличение тока происходит постепенно: вихревое электрическое поле катушки препятствует нарастанию тока и направлено против тока.

Аналогия. Маятник движется влево к положению равновесия; скорость v маятника постепенно увеличивается. Деформация пружины x (она же — координата маятника) уменьшается.

Конец первой четверти: $t = T/4$. Конденсатор полностью разрядился. Сила тока достигла максимального значения I_0 (рис. 3). Сейчас начнётся перезарядка конденсатора.

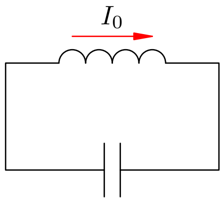

Рис. 3. $t = T/4$

Напряжение на катушке равно нулю, но ток не исчезнет мгновенно. Как только ток начнёт уменьшаться, в катушке возникнет ЭДС самоиндукции, препятствующая убыванию тока.

Аналогия. Маятник проходит положение равновесия. Его скорость достигает максимального значения v_0. Деформация пружины равна нулю.

Вторая четверть: $T/4 < t < T/2$. Конденсатор перезаряжается — на его обкладках появляется заряд противоположного знака по сравнению с тем, что был вначале (рис. 4).

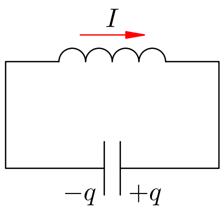

Рис. 4. $T/4 < t < T/2$

Сила тока убывает постепенно: вихревое электрическое поле катушки, поддерживая убывающий ток, сонаправлено с током.

Аналогия. Маятник продолжает двигаться влево — от положения равновесия к правой крайней точке. Скорость его постепенно убывает, деформация пружины увеличивается.

Конец второй четверти $t = T/2$. Конденсатор полностью перезарядился, его заряд опять равен q_0 (но полярность другая). Сила тока равна нулю (рис. 5). Сейчас начнётся обратная перезарядка конденсатора.

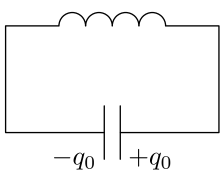

Рис. 5. $t = T/2$

Аналогия. Маятник достиг крайней правой точки. Скорость маятника равна нулю. Деформация пружины максимальна и равна x_0.

Третья четверть: $T/2 < t < 3T/4$. Началась вторая половина периода колебаний; процессы пошли в обратном направлении. Конденсатор разряжается (рис. 6).

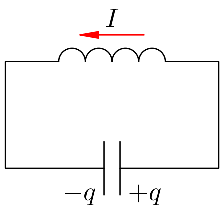

Рис. 6. $T/2 < t < 3T/4$

Аналогия. Маятник двигается обратно: от правой крайней точки к положению равновесия.

Конец третьей четверти: $t = 3T/4$. Конденсатор полностью разрядился. Ток максимален и снова равен I_0, но на сей раз имеет другое направление (рис. 7).

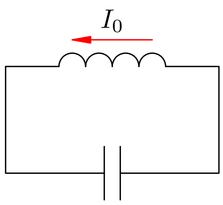

Рис. 7. $t = 3T/4$

Аналогия. Маятник снова проходит положение равновесия с максимальной скоростью v_0, но на сей раз в обратном направлении.

Четвёртая четверть: $3T/4 < t < T$. Ток убывает, конденсатор заряжается (рис. 8).

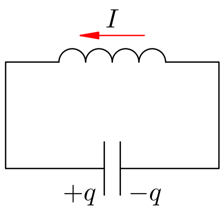

Рис. 8. $3T/4 < t < T$

Аналогия. Маятник продолжает двигаться вправо — от положения равновесия к крайней левой точке.

Конец четвёртой четверти и всего периода: $t = T$. Обратная перезарядка конденсатора завершена, ток равен нулю (рис. 9).

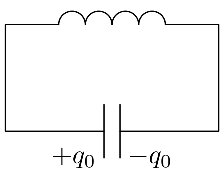

Рис. 9. $t = T$

Данный момент идентичен моменту $t = 0$, а данный рисунок — рисунку 1. Совершилось одно полное колебание. Сейчас начнётся следующее колебание, в течение которого процессы будут происходить точно так же, как описано выше.

Аналогия. Маятник вернулся в исходное положение.

Рассмотренные электромагнитные колебания являются *незатухающими* — они будут продолжаться бесконечно долго. Ведь мы предположили, что сопротивление катушки равно нулю! Точно так же будут незатухающими колебания пружинного маятника при отсутствии трения.

В реальности катушка обладает некоторым сопротивлением. Поэтому колебания в реальном колебательном контуре будут затухающими. Так, спустя одно полное колебание заряд на конденсаторе окажется меньше исходного значения. Со временем колебания и вовсе исчезнут: вся энергия, запасённая изначально в контуре, выделится в виде тепла на сопротивлении катушки и соединительных проводов.

Точно так же будут затухающими колебания реального пружинного маятника: вся энергия маятника постепенно превратится в тепло из-за неизбежного наличия трения.

Энергетические превращения в колебательном контуре

Продолжаем рассматривать незатухающие колебания в контуре, считая сопротивление катушки нулевым. Конденсатор имеет ёмкость C, индуктивность катушки равна L.

Поскольку тепловых потерь нет, энергия из контура не уходит: она постоянно перераспределяется между конденсатором и катушкой.

Возьмём момент времени, когда заряд конденсатора максимален и равен q_0, а ток отсутствует. Энергия магнитного поля катушки в этот момент равна нулю. Вся энергия W контура сосредоточена в конденсаторе:

$$W = \frac{q_0^2}{2C}\,.$$

Теперь, наоборот, рассмотрим момент, когда ток максимален и равен I_0, а конденсатор разряжен. Энергия конденсатора равна нулю. Вся энергия контура запасена в катушке:

$$W = \frac{LI_0^2}{2}\,.$$

В произвольный момент времени, когда заряд конденсатора равен q и через катушку течёт ток I, энергия контура равна:

$$W = \frac{q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2}\,.$$

Таким образом,

$$\frac{q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2} = \frac{q_0^2}{2C} = \frac{LI_0^2}{2}\,. \tag{1}$$

Соотношение (1) применяется при решении многих задач.

Электромеханические аналогии

В предыдущем листке про самоиндукцию мы отметили аналогию между индуктивностью и массой. Теперь мы можем установить ещё несколько соответствий между электродинамическими и механическими величинами.

Для пружинного маятника мы имеем соотношение, аналогичное (1):

$$\frac{kx^2}{2} + \frac{mv^2}{2} = \frac{kx_0^2}{2} = \frac{mv_0^2}{2}\,. \tag{2}$$

Здесь, как вы уже поняли, k — жёсткость пружины, m — масса маятника, x и v — текущие значения координаты и скорости маятника, x_0 и v_0 — их наибольшие значения.

Сопоставляя друг с другом равенства (1) и (2), мы видим следующие соответствия:

$$q \longleftrightarrow x; \tag{3}$$
$$I \longleftrightarrow v; \tag{4}$$
$$L \longleftrightarrow m; \tag{5}$$
$$1/C \longleftrightarrow k. \tag{6}$$

Опираясь на эти электромеханические аналогии, мы можем предвидеть формулу для периода электромагнитных колебаний в колебательном контуре.

В самом деле, период колебаний пружинного маятника, как мы знаем, равен:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\,.$$

В соответствии с аналогиями (5) и (6) заменяем здесь массу m на индуктивность L, а жёсткость k на обратную ёмкость $1/C$. Получим:

$$T = 2\pi\sqrt{LC}\,. \tag{7}$$

Электромеханические аналогии не подводят: формула (7) даёт верное выражение для периода колебаний в колебательном контуре. Она называется *формулой Томсона*. Мы вскоре приведём её более строгий вывод.

Гармонический закон колебаний в контуре

Напомним, что колебания называются *гармоническими*, если колеблющаяся величина меняется со временем по закону синуса или косинуса. Если вы успели забыть эти вещи, обязательно повторите листок «Механические колебания».

Колебания заряда на конденсаторе и силы тока в контуре оказываются гармоническими. Мы сейчас это докажем. Но прежде нам надо установить правила выбора знака для заряда конденсатора и для силы тока — ведь при колебаниях эти величины будут принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Сначала мы выбираем *положительное направление обхода* контура. Выбор роли не играет; пусть это будет направление *против часовой стрелки* (рис. 10).

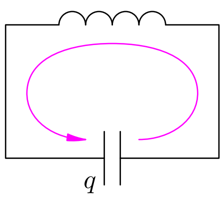

Рис. 10. Положительное направление обхода

Сила тока считается положительной ($I > 0$), если ток течёт в положительном направлении. В противном случае сила тока будет отрицательной ($I < 0$).

Заряд конденсатора q — это заряд той его пластины, *на которую* течёт положительный ток (т. е. той пластины, на которую указывает стрелка направления обхода). В данном случае q — заряд *левой* пластины конденсатора.

При таком выборе знаков тока и заряда справедливо соотношение: $\dot{q} = I$ (при ином выборе знаков могло случиться $\dot{q} = -I$). Действительно, знаки обеих частей совпадают: если $I > 0$, то заряд q левой пластины возрастает, и потому $\dot{q} > 0$.

Величины $q = q(t)$ и $I = I(t)$ меняются со временем, но энергия контура остаётся неизменной:

$$\frac{q^2}{2C} + \frac{LI^2}{2} = W = \text{const}. \tag{8}$$

Стало быть, производная энергии по времени обращается в нуль: $\dot{W} = 0$. Берём производную по времени от обеих частей соотношения (8); не забываем, что слева дифференцируются сложные функции[1]:

$$\frac{2q\dot{q}}{2C} + \frac{L \cdot 2I\dot{I}}{2} = \dot{W} = 0.$$

Подставляя сюда $\dot{q} = I$ и $\dot{I} = \ddot{q}$, получим:

$$\frac{qI}{C} + LI\ddot{q} = 0,$$
$$I\left(\frac{q}{C} + L\ddot{q}\right) = 0.$$

Но сила тока не является функцией, тождественно равной нулю; поэтому

$$\frac{q}{C} + L\ddot{q} = 0.$$

Перепишем это в виде:

$$\ddot{q} + \frac{1}{LC}\,q = 0. \tag{9}$$

Мы получили дифференциальное уравнение гармонических колебаний вида $\ddot{q} + \omega_0^2 q = 0$, где $\omega_0^2 = 1/LC$. Это доказывает, что заряд конденсатора колеблется по гармоническому закону (т. е. по закону синуса или косинуса). Циклическая частота этих колебаний равна:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\,. \tag{10}$$

Эта величина называется ещё *собственной частотой* контура; именно с этой частотой в контуре совершаются свободные (или, как ещё говорят, *собственные* колебания). Период колебаний равен:

$$T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}\,.$$

Мы снова пришли к формуле Томсона.

Гармоническая зависимость заряда от времени в общем случае имеет вид:

$$q = q_0\cos(\omega_0 t + \alpha). \tag{11}$$

Циклическая частота ω_0 находится по формуле (10); амплитуда q_0 и начальная фаза α определяются из начальных условий.

Мы рассмотрим ситуацию, подробно изученную в начале этого листка. Пусть при $t = 0$ заряд конденсатора максимален и равен q_0 (как на рис. 1); ток в контуре отсутствует. Тогда начальная фаза $\alpha = 0$, так что заряд меняется по закону косинуса с амплитудой q_0:

$$q = q_0\cos\omega_0 t = q_0\cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right). \tag{12}$$

[1] Если $y = y(x)$ — функция от x, то по правилу дифференцирования сложной функции производная от квадрата нашей функции будет равна: $(y^2)' = 2yy'$.

Найдём закон изменения силы тока. Для этого дифференцируем по времени соотношение (12), опять-таки не забывая о правиле нахождения производной сложной функции:

$$I = \dot{q} = -q_0\omega_0 \sin \omega_0 t.$$

Мы видим, что и сила тока меняется по гармоническому закону, на сей раз — по закону синуса:

$$I = -I_0 \sin \omega_0 t = -I_0 \sin\left(\frac{t}{\sqrt{LC}}\right). \tag{13}$$

Амплитуда силы тока равна:

$$I_0 = q_0\omega_0 = \frac{q_0}{\sqrt{LC}}.$$

Наличие «минуса» в законе изменения тока (13) понять не сложно. Возьмём, к примеру, интервал времени $0 < t < T/4$ (рис. 2).

Ток течёт в отрицательном направлении: $I < 0$. Поскольку $\omega_0 = 2\pi/T$, фаза колебаний находится в первой четверти: $0 < \omega_0 t < \pi/2$. Синус в первой четверти положителен; стало быть, синус в (13) будет положительным на рассматриваемом интервале времени. Поэтому для обеспечения отрицательности тока действительно необходим знак «минус» в формуле (13).

А теперь посмотрите на рис. 8. Ток течёт в положительном направлении. Как же работает наш «минус» в этом случае? Разберитесь-ка, в чём тут дело!

Изобразим графики колебаний заряда и тока, т. е. графики функций (12) и (13). Для наглядности представим эти графики в одних координатных осях (рис. 11).

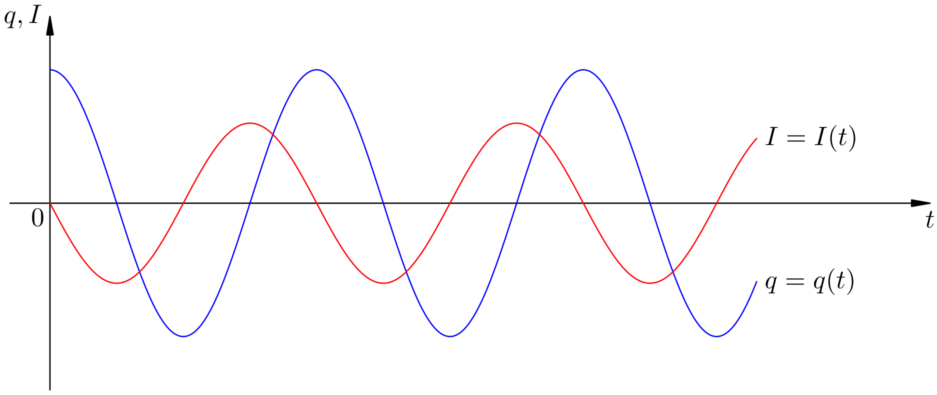

Рис. 11. Графики колебаний заряда и тока

Обратите внимание: нули заряда приходятся на максимумы или минимумы тока; и наоборот, нули тока соответствуют максимумам или минимумам заряда.

Используя формулу приведения

$$\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\varphi,$$

запишем закон изменения тока (13) в виде:

$$I = -I_0 \sin \omega_0 t = I_0 \cos\left(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}\right).$$

Сопоставляя это выражение с законом изменения заряда $q = q_0 \cos \omega_0 t$, мы видим, что фаза тока, равная $\omega_0 t + \pi/2$, больше фазы заряда $\omega_0 t$ на величину $\pi/2$. В таком случае говорят, что ток *опережает по фазе* заряд на $\pi/2$; или *сдвиг фаз* между током и зарядом равен $\pi/2$; или *разность фаз* между током и зарядом равна $\pi/2$.

Опережение током заряда по фазе на $\pi/2$ графически проявляется в том, что график тока сдвинут *влево* на $\pi/2$ относительно графика заряда. Сила тока достигает, например, своего максимума на четверть периода раньше, чем достигает максимума заряд (а четверть периода как раз и соответствует разности фаз $\pi/2$).

Вынужденные электромагнитные колебания

Как вы помните, *вынужденные колебания* возникают в системе под действием периодической вынуждающей силы. Частота вынужденных колебаний совпадает с частотой вынуждающей силы.

Вынужденные электромагнитные колебания будут совершаться в контуре, поключённом к источнику синусоидального напряжения (рис. 12).

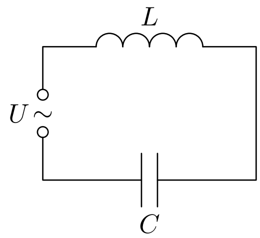

Рис. 12. Вынужденные колебания

Если напряжение источника меняется по закону:

$$U = U_0 \sin \omega t,$$

то в контуре происходят колебания заряда и тока с циклической частотой ω (и с периодом, соответственно, $T = 2\pi/\omega$). Источник переменного напряжения как бы «навязывает» контуру свою частоту колебаний, заставляя забыть о собственной частоте $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

Амплитуда вынужденных колебаний заряда и тока зависит от частоты ω: амплитуда тем больше, чем ближе ω к собственной частоте контура ω_0. При $\omega = \omega_0$ наступает *резонанс* — резкое возрастание амплитуды колебаний. Мы поговорим о резонансе более подробно в следующем листке, посвящённом переменному току.

Домашнее задание:

1.Ознакомьтесь с материалом по данной теме.
2.Законспектируйте то, что считаете важным.
4.Результаты работы сфотографировать.
5.Проверить читаемость полученной фотографии.
6.Результаты работы оправить по электронному адресу: *seliwerstov66@gmail.com*